Tutorium X zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2022/23
Komplexe Zahlen, Integration — Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
PÜ 20. und 21. Dezember 2022 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

KOMPLEXE ZAHLEN, INTEGRATION

[P23] *Realisierung der komplexen Zahlen*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ Drehungen um die speziellen Winkel $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also

$$D_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: \mathbb{1} \qquad \text{und} \qquad D_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: \mathbb{i}\,.$$

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{i} \cdot \mathbb{i}$, $\mathbb{i}^3$, $\mathbb{i}^4$ und schließlich $(\mathbb{1} - \mathbb{i}) \cdot (\mathbb{1} + \mathbb{i})$.

(b) Entwickeln Sie $\exp(\mathbb{i}\,\alpha)$ in eine Taylorreihe. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (a), um daraus Taylorreihen für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu erhalten.

(c) Machen Sie sich umgekehrt klar, dass Sie jede Matrix $\mathbb{z} = x\,\mathbb{1} + y\,\mathbb{i}$ für reelle x, y in der Form $r\exp(\mathbb{i}\,\alpha)$ schreiben können und drücken Sie r, α durch x, y aus.

(d) Zeigen Sie schließlich, dass auch Ausdrücke der Form $(a\,\mathbb{1} + b\,\mathbb{i}) \cdot (c\,\mathbb{1} + d\,\mathbb{i})$ und $\dfrac{a\,\mathbb{1} + b\,\mathbb{i}}{c\,\mathbb{1} + d\,\mathbb{i}}$ leicht wieder als $x\,\mathbb{1} + y\,\mathbb{i}$ geschrieben werden können und geben Sie jeweils x und y an.

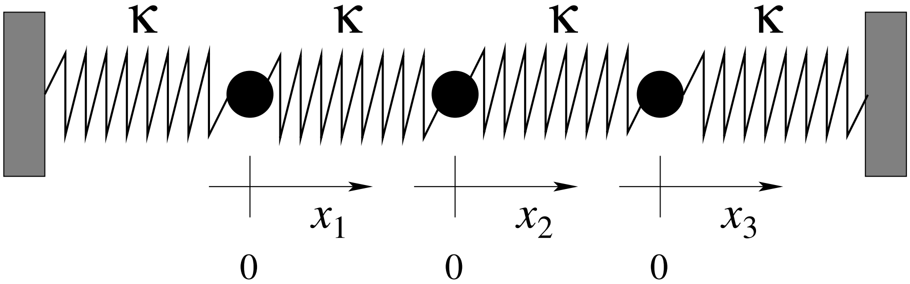
Da offenbar Matrizen der Form $\mathbb{z}$ aus (c) unter Addition und Multiplikation abgeschlossen sind, und nach (d) auch die Division möglich ist, haben Sie damit gezeigt, dass die Menge der Matrizen

$$\{\mathbb{z} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) : \mathbb{z} = x\,\mathbb{1} + y\,\mathbb{i}\}$$

mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ identifiziert werden kann.

[P24] *Gitterschwingungen*

Diese Aufgabe gibt einen ersten Einblick darin, wie man das Verhalten von Festkörpern genauer studieren kann. Wir vereinfachen die Situation auf einen Festkörper in einer Raumdimension, also eine Kette von Atomen. Die Atombindungen berschreibt man gerne effektiv so, als ob die Atome mit Federn miteinander verbunden sind. Alle diese Federn sind genau gleich. Um die Aufgabe für uns lösbar zu machen, betrachten wir einen linienförmigen Festkörper aus nur drei Atomen. Das Prinzip lässt sich aber auf mehrdimensionale Körper und deutlich größere Anzahlen von Atomen verallgemeinern. Die folgende Skizze verdeutlicht die Situation.



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_i, $i = 1, 2, 3$, auf.

(b) Bringen Sie die Bewegungsgleichungen in eine Form $\ddot{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Wie lautet die Matrix A?

(c) Machen Sie einen Exponentialansatz $\mathbf{x} = \mathbf{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$ und formen damit die Gleichung aus (b) in eine Eigenwertgleichung um.

Die physikalische Bedeutung der Eigenwerte ist hier, dass sie die möglichen Frequenzen, mit denen die Atome im Festkörper relativ zueinander schwingen können, angeben.

(d) Zeigen Sie, dass für die folgenden drei Vektoren $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, gilt: $A\,\mathbf{f}_i = \lambda_i\,\mathbf{f}_i$, und geben Sie die Zahlen λ_i an.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen λ_i sind also die Eigenwerte, die Vektoren $\mathbf{f}_i$ sind die Eigenvektoren.

(e) Interpretieren Sie, welcher Art die Eigenschwingungen $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{f}_i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_i\,t}$ des Systems sind.

Bitte wenden!

[P25] *Alle Wege führen nach Rom*

Das Integral $J_1 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$ soll auf vier verschiedenen Wegen ausgerechnet werden, und zwar:

(a) Berechnen Sie $\partial_x \left(\alpha x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}\right)$ und $\partial_x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Geben Sie damit die gesuchte Stammfunktion an.

(b) Berechnen Sie $J_2 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$ und differenzieren Sie nach α.

(c) Arbeiten Sie mit partieller Integration und verwenden Sie wieder J_2.

(d) Betrachten Sie $J_3 = \lim_{\beta \to 0} \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1}{\beta} \sin(\beta x)\, \mathrm{e}^{-\alpha x}$ und verwenden Sie die Euler-Formel.